Ejercicio 13 de la relación de problemas. Discutir, según los valores de los parámetros a y b, y resolver, en su caso, los siguiente sistemas de ecuaciones:

$$a)\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=a \\ x+y+az=a^2 \end{cases}, \quad b)\begin{cases} ax+by+z=1 \\ ax+y+bz=1 \\ ax+y+z=b \end{cases}, \quad c)\begin{cases} 3x-y=ax \\ 5x+y+2z=ay \\ 4y+3z=az \end{cases}.$$

a) Para discutir el sistema empezamos calculando el determinante de la matriz de coeficiente A, del sistema y calculamos los valores del parámetro para los cuales el determinante es cero:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3+1+1-a-a-a = a^3-3a+2 = (a+2)(a-1)^2 = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & \downarrow & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & \downarrow & 1 & 2 & \\ \hline & 1 & 2 & 0 & \end{array}$$

Luego el determinante de A será cero si a es igual a 1 o a es igual a -2, por tanto, si a es distinto de 1 y -2, el rango será 3 ya que en este caso el mayor menor distinto de cero es la matriz A (3×3). Veamos que ocurre cuando a = 1 o a = -2:

Si a = 1, la matriz de coeficiente sería: A= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, y claramente es de rango 1, los menores de orden 2 son todos cero.

Si a = –2 , la matriz de coeficiente sería: A= $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, es fácil ver que esta matriz es de rango 2 ya que tiene menores de orden 2 no nulos, por ejemplo

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3$$

Por tanto,

$$rango(A) = \begin{cases} 3 & si\ a \neq 1, -2 \\ 2 & si\ a = -2 \\ 1 & si\ a = 1 \end{cases}$$

Ahora calculamos el rango de la matriz ampliada A|b del sistema según los valores del parámetro.

A|b= $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & a & a^2 \end{pmatrix}$

Teniendo en cuenta que A es parte de esta nueva matriz, parte del trabajo ya está hecho. De hecho, si a ≠ 1 y a ≠ –2, el rango de A|b es 3 ya que, en este caso, A es de rango 3 y la ampliada es una matriz 3×4 que como mucho es de rango 3. Sólo nos queda ver que ocurre en los otros dos casos:

Si a = 1, la matriz ampliada es: $A|b=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, de nuevo, vemos que es de rango 1, todas las filas son iguales.

Si a = –2 , la matriz ampliada es: $A|b=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$. Ahora esta matriz tiene nuevos menores de orden 3, veamos si alguno distinto de ellos es cero:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 2 + 4 - 1 - 4 + 8 = 9 \neq 0$$

Luego el rango en este caso es 3

Por tanto,

$$rango(A|b) = \begin{cases} 3 & si\ a \neq 1 \\ 1 & si\ a = 1 \end{cases}$$

Usando el teorema de Rouche-Frobenius, podemos ahora discutir el sistema según los valores del parámetro a:

- Si a $\neq$ 1, rango(A) = rango(A|b) = 3 = nº de incógnitas, luego el sistema es un sistema compatible determinado (S.C.D.).
- Si a $=$ 1, rango(A) = rango(A|b) = 1< nº de incógnitas, luego el sistema es un sistema compatible indeterminado (S.C.I.).
- Si a $= -2$, rango(A) ≠ rango(A|b) , luego el sistema es un sistema incompatible (S.I.).

Ahora resolvemos aquellos casos donde es posible:

- Si a = 1, el sistema vendría dado por una sola ecuación:

$$x + y + z = 1$$

Despejamos la primera variable en función de las otras dos a las que le asignamos parámetros distintos

$$\begin{aligned} x &= 1 - \alpha - \beta, \\ y &= \alpha, \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \\ z &= \beta, \end{aligned}$$

- Si a $\neq 1, -2$, podemos resolverlo usando Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a & 1 \\ a^2 & 1 & a \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-a^3 + a^2 + a - 1}{(a-1)^2(a+2)} = \frac{-(a-1)^2(a+1)}{(a-1)^2(a+2)} = \frac{-(a+1)}{(a+2)}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & a^2 & a \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{a^2 - 2a + 1}{(a-1)^2(a+2)} = \frac{(a-1)^2}{(a-1)^2(a+2)} = \frac{1}{(a+2)}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & 1 & a^2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{a^4 - 2a^2 + 1}{(a-1)^2(a+2)} = \frac{(a-1)^2(a+1)^2}{(a-1)^2(a+2)} = \frac{(a+1)^2}{(a+2)}$$

Por tanto,

$$x = \frac{-(a+1)}{(a+2)}, \quad y = \frac{1}{(a+2)}, \quad z = \frac{(a+1)^2}{(a+2)},$$

Ejercicio 13 de la relación de problemas. Discutir, según los valores de los parámetros a y b, y resolver, en su caso, los siguiente sistemas de ecuaciones:

$$a)\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=a \\ x+y+az=a^2 \end{cases}, \quad b)\begin{cases} ax+by+z=1 \\ ax+y+bz=1 \\ ax+y+z=b \end{cases}, \quad c)\begin{cases} 3x-y=ax \\ 5x+y+2z=ay \\ 4y+3z=az \end{cases}.$$

b) En este caso tenemos dos parámetros y según los valores de los parámetros el rango de A y la ampliada nos queda:

$$rango(A)=\begin{cases} 3 & si\ a\neq 0\ y\ b\neq 1 \\ 2 & si\ a=0\ y\ b\neq 1 \\ 1 & si\ a=0\ y\ b=1 \end{cases}$$

$$rango(A|b)=\begin{cases} 3 & si\ a\neq 0\ y\ b\neq 1 \\ 3 & si\ a=0\ y\ b\neq 1,-2 \\ 2 & si\ a=0\ y\ b=-2 \\ 1 & si\ a=0\ y\ b=1 \end{cases}$$

Usando el teorema de Rouche-Frobenius:

- Si $a\neq 0\ y\ b\neq 1$, el sistema es compatible determinado (S.C.D.).
- Si $a=0\ y\ b=-2$, el sistema es compatible indeterminado (S.C.I.) con un grado de libertad (1 parámetro)
- Si $a=0\ y\ b=1$, el sistema es compatible indeterminado (S.C.I.) con dos grados de libertad (2 parámetros)
- Si $a=0\ y\ b\neq 1,-2$, el sistema es un sistema incompatible (S.I.).

Ejercicio 13 de la relación de problemas. Discutir, según los valores de los parámetros a y b, y resolver, en su caso, los siguiente sistemas de ecuaciones:

$$a)\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=a \\ x+y+az=a^2 \end{cases}, \qquad b)\begin{cases} ax+by+z=1 \\ ax+y+bz=1 \\ ax+y+z=b \end{cases}, \qquad c)\begin{cases} 3x-y=ax \\ 5x+y+2z=ay \\ 4y+3z=az \end{cases}.$$

c) En este caso, se trata de un sistema homogéneo, nótese que primero tenemos que pasar a la izquierda los terminos *ax*, *ay* y *az*. Según el valor del parámetro el rango de A y de la ampliada (en este caso coincide ya que ampliamos con ceros) nos queda:

$$rango(A)=rango(A|b)=\begin{cases} 3 & si\ a\neq 0,3,4 \\ 2 & sia=0,3\ o\ 4 \end{cases}$$

Usando el teorema de Rouche-Frobenius:

- Si $a\neq 0,3,4$, el sistema es compatible determinado (S.C.D.).
- Si $a=0,3\ o\ 4$, el sistema es compatible indeterminado (S.C.I.) con un grado de libertad (1 parámetro)